

TEAM CÔ NGỌC HUYỀN LB

TÀI LIỆU KHÓA HỌC ĐỘC QUYỀN

KHÓA BON 11 SEASON 2026

STEP 1 | KIẾN THỨC NỀN TẢNG TOÁN 11

THEME 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC

Xem bài giảng & thi online trên ngochuyenlb.edu.vn tại lớp:
STEP 1 | NỀN TẢNG (BON 11 2026)

A Kiến thức cần nắm

1. Góc hình học và số đo của góc hình học

1.1. Đơn vị đo góc

→ Đơn vị độ:

$$180^\circ = \pi \text{ rad.}$$

→ Đơn vị radian:

$$\rightarrow 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi} \right)^\circ \approx 57^\circ 17' 45''.$$

$$\rightarrow 1^\circ = \left(\frac{\pi}{180} \right) \text{ rad} \approx 0,0175 \text{ rad.}$$

Bảng đổi số đo độ và số đo radian của một số góc đặc biệt:

Độ	30°	45°	60°	90°	120°	135°	180°
Radian	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π

$$30^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$$

$$45^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4}$$

$$60^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$$

REMARK 1

Đơn vị radian.

Cho đường tròn (O) tâm O, bán kính R và một cung AB trên (O).

Ta nói cung tròn AB có số đo bằng 1 radian nếu độ dài của nó đúng bằng bán kính R.

Khi đó ta cũng nói rằng góc AOB có số đo bằng 1 radian và viết $\widehat{AOB} = 1 \text{ rad}$.

1 rad.

$$\text{Chu vi} = 2\pi R \sim 2\pi \text{ rad} = 360^\circ \rightarrow \pi = 180^\circ.$$

REMARK 2

Quan hệ giữa độ và radian.

Do đường tròn có độ dài là $2\pi R$ nên nó có số đo $2\pi \text{ rad}$.

Mặt khác đường tròn có số đo bằng 360° nên $360^\circ = 2\pi \text{ rad}$. Nên $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$; $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi} \right)^\circ$.

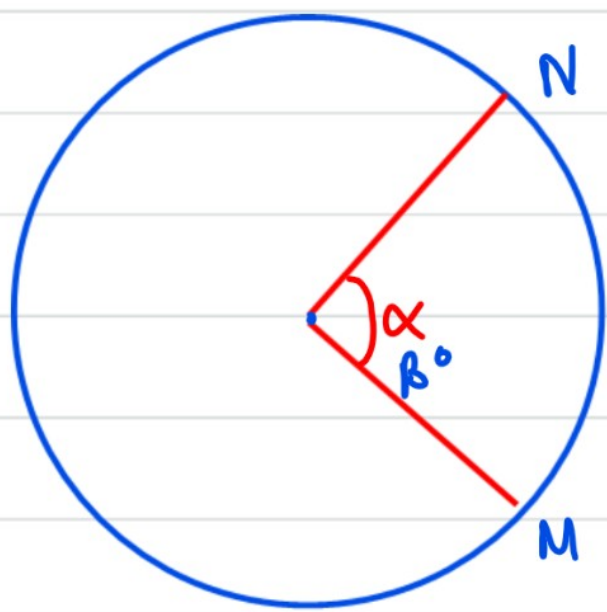
REMARK 3

Khi viết số đo của một góc theo đơn vị radian, người ta thường không viết chữ rad sau số

đo. Chẳng hạn góc $\frac{\pi}{2}$ được hiểu là góc $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$.

1.2. Độ dài cung tròn

Một cung của đường tròn bán kính R và có số đo $\alpha \text{ rad}$ thì có độ dài $l = R\alpha$.

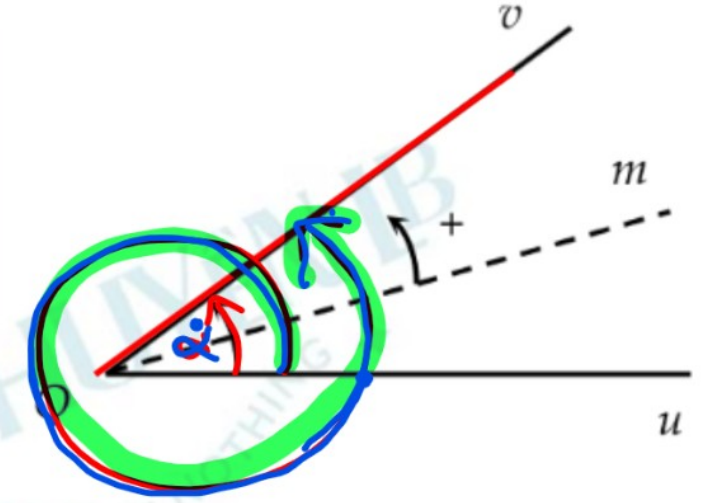


$$l_{\widehat{MN}} = R \cdot \alpha \quad (\alpha : \text{rad})$$

$$l_{\widehat{MN}} = \underbrace{2\pi R}_{\text{Chuni}} \cdot \frac{\beta^\circ}{360^\circ} = \frac{\beta^\circ}{360^\circ} \cdot \text{Chuni}$$

2. Góc lượng giác và số đo của góc lượng giác

Trong mặt phẳng, cho hai tia Ou, Ov . Xét tia Om cùng nằm trong mặt phẳng này. Nếu tia Om quay quanh điểm O , theo một chiều nhất định từ Ou đến Ov , thì ta nói nó quét một góc lượng giác với tia đầu Ou , tia cuối Ov và kí hiệu là (Ou, Ov) .



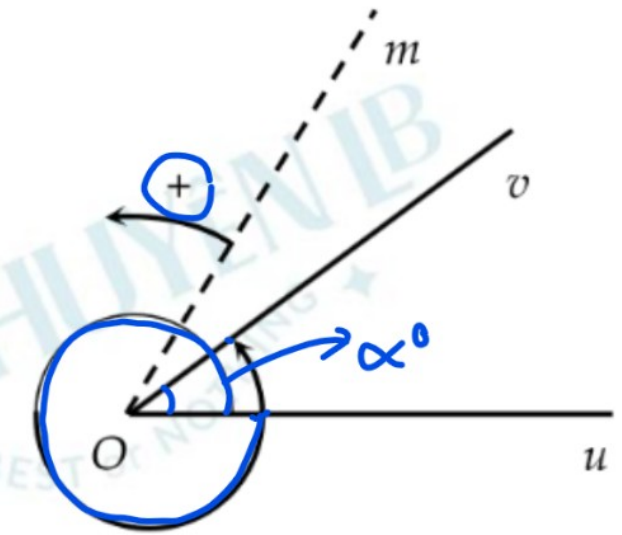
REMARK 1

Góc lượng giác (Ou, Ov) chỉ được xác định khi ta biết được chuyển động quay của tia Om từ tia đầu Ou đến tia cuối Ov .

Ta quy ước:

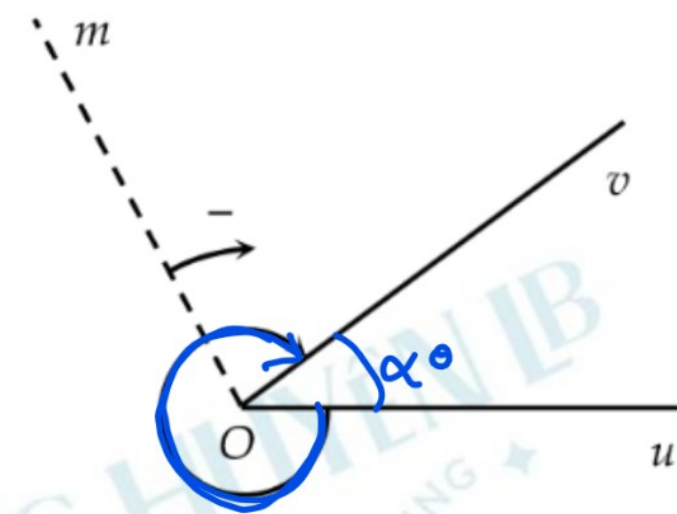
- Chiều quay ngược với chiều quay của kim đồng hồ là chiều dương.

$$(Ou, Ov) = (\alpha + 360)^\circ$$



- Chiều quay cùng chiều kim đồng hồ là chiều âm.

$$(Ou, Ov) = -(360 - \alpha)^\circ$$



REMARK 2

Khi tia Om quay góc a° thì góc lượng giác mà tia đó quét nên có số đo a° (hay $\frac{\pi a}{180}$ rad).

Vì thế, mỗi một góc lượng giác đều có một số đo, đơn vị đo góc lượng giác là độ hoặc radian. Nếu góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo bằng α thì ta kí hiệu là $\text{sđ}(Ou, Ov) = \alpha$ hoặc $(Ou, Ov) = \alpha$.

Mỗi góc lượng giác gốc O được xác định bởi tia đầu Ou , tia cuối Ov và số đo của nó.

REMARK 3

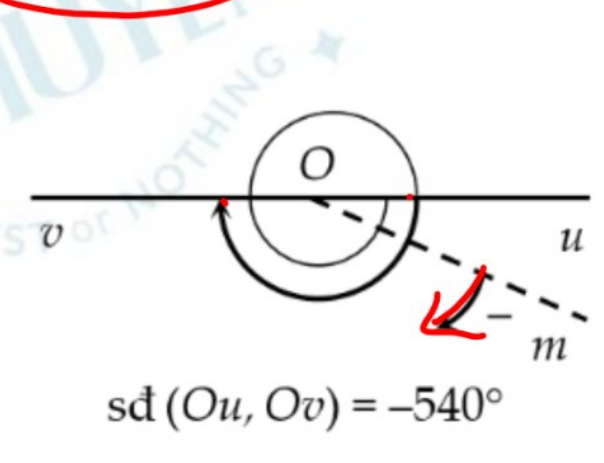
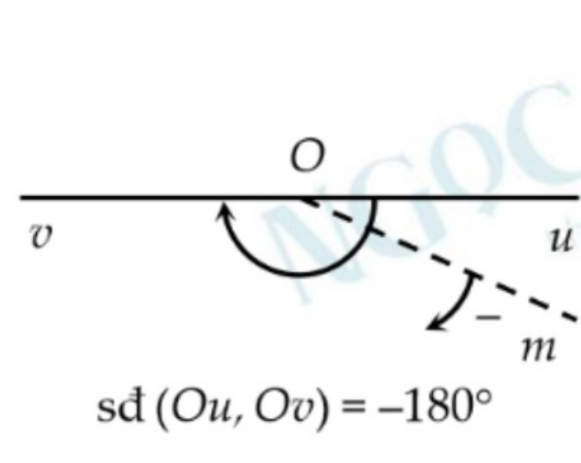
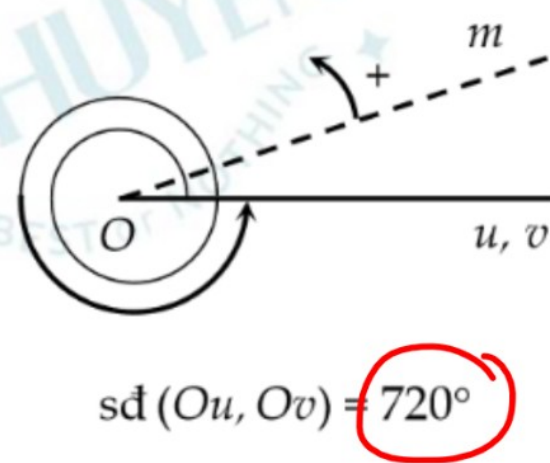
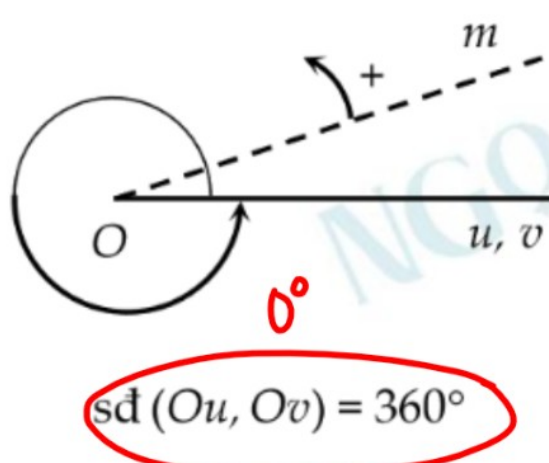
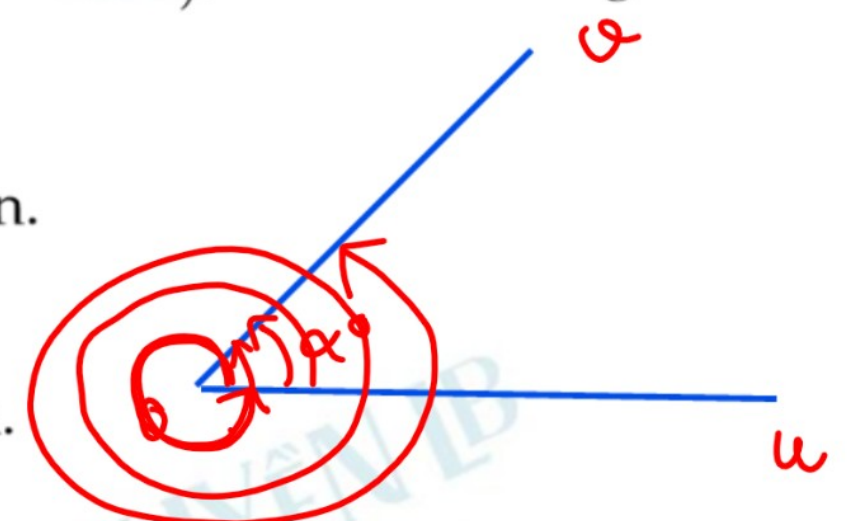
Cho hai tia Ou, Ov thì có vô số góc lượng giác tia đầu Ou , tia cuối Ov .

Cho hai góc lượng giác $(Ou, Ov), (O'u', O'v')$ có tia đầu trùng nhau ($Ou \equiv O'u'$), tia cuối trùng nhau ($Ov \equiv O'v'$). Khi đó, nếu sử dụng đơn vị đo là độ thì ta có:

$$(Ou, Ov) = (O'u', O'v') + k360^\circ \text{ với } k \text{ là số nguyên.}$$

Nếu sử dụng đơn vị đo là radian thì công thức trên có thể viết như sau:

$$(Ou, Ov) = (O'u', O'v') + k2\pi \text{ với } k \text{ là số nguyên.}$$

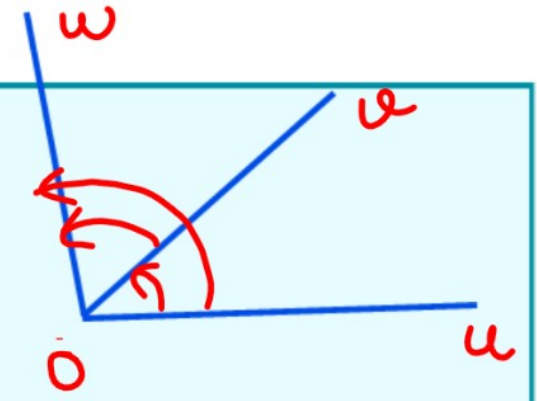


Hệ thức Chasles (Sa - lơ)

Với ba tia Ou, Ov, Ow bất kì, ta có:

- $sđ(Ou, Ov) + sđ(Ov, Ow) = sđ(Ou, Ow) + k360^\circ (k \in \mathbb{Z})$.
- $sđ(Ov, Ow) = sđ(Ou, Ow) - sđ(Ou, Ov) + k'360^\circ (k' \in \mathbb{Z})$.

→ Quay!



Chung gốc, đo lớn

REMARK 4

Từ hệ thức Chasles, ta suy ra:

Với ba tia tùy ý Ox, Ou, Ov ta có:

$$sđ(Ou, Ov) = sđ(Ox, Ov) - sđ(Ox, Ou) + k360^\circ (k \in \mathbb{Z}).$$

Hệ thức này đóng vai trò quan trọng trong việc tính toán số đo của góc lượng giác.

[Ví dụ] Cho một góc lượng giác (Ox, Ou) có số đo 240° và một góc lượng giác (Ox, Ov) có số đo -270° .
Tính số đo của các góc lượng giác (Ou, Ov) .

Lời giải

Số đo của các góc lượng giác có tia đầu Ou , tia cuối Ov là

$$\begin{aligned} sđ(Ou, Ov) &= sđ(Ox, Ov) - sđ(Ox, Ou) + k \cdot 360^\circ \\ &= -270^\circ - 240^\circ + k \cdot 360^\circ \\ &= -510^\circ + k \cdot 360^\circ \\ &= -(150^\circ + 360^\circ) + k \cdot 360^\circ \\ &= -150^\circ + (k-1) \cdot 360^\circ \\ &= -150^\circ + m \cdot 360^\circ \quad (m = k-1). \end{aligned}$$

Vậy các góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo là $-150^\circ + m \cdot 360^\circ$ với $m \in \mathbb{Z}$.

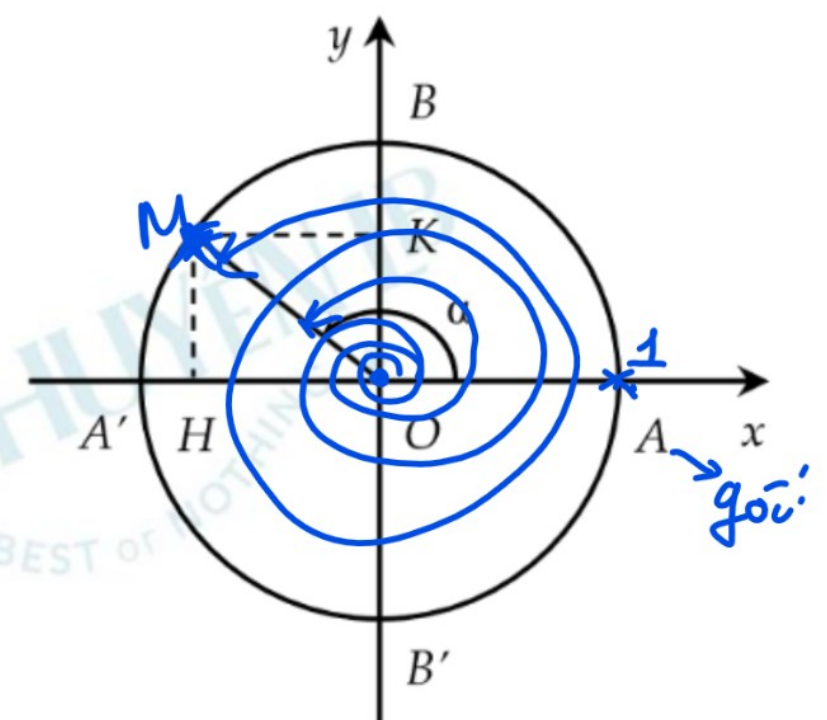
3. Giá trị lượng giác của góc lượng giác

3.1. Đường tròn lượng giác

- Đường tròn lượng giác là đường tròn có tâm tại gốc toạ độ, bán kính bằng 1, được định hướng và lấy điểm $A(1;0)$ làm điểm gốc của đường tròn.
- Điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo α (độ hoặc radian) là điểm M trên đường tròn lượng giác sao cho $sđ(OA, OM) = \alpha$.

$$\begin{aligned} \alpha + 2\pi \\ \alpha + 2 \cdot 2\pi \end{aligned}$$

$$\alpha + k \cdot 2\pi.$$



[Ví dụ] Trên đường tròn lượng giác, xác định điểm M biểu diễn các góc lượng giác có số đo sau:

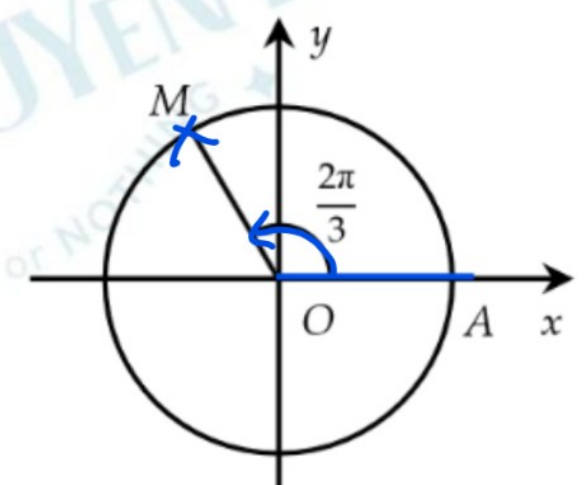
a) $\frac{2\pi}{3}$.

b) -225° .

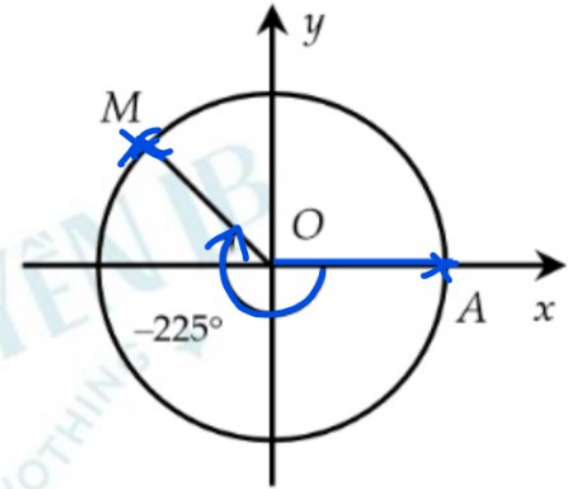
c) $-\frac{11\pi}{4}$.

Lời giải

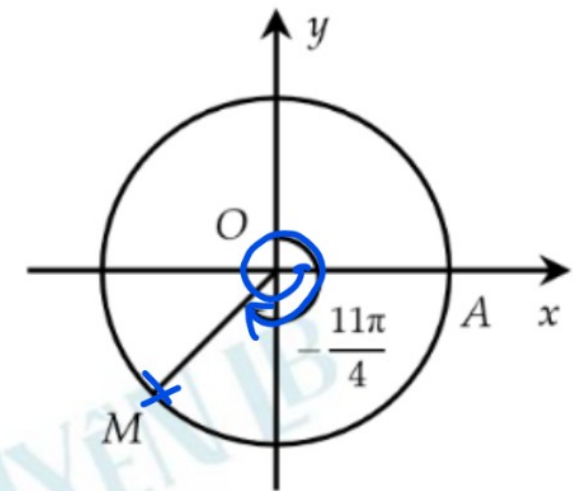
a) Điểm M trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo bằng $\frac{2\pi}{3}$ được xác định trong hình bên.



b) Điểm M trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo bằng -225° được xác định trong hình bên.

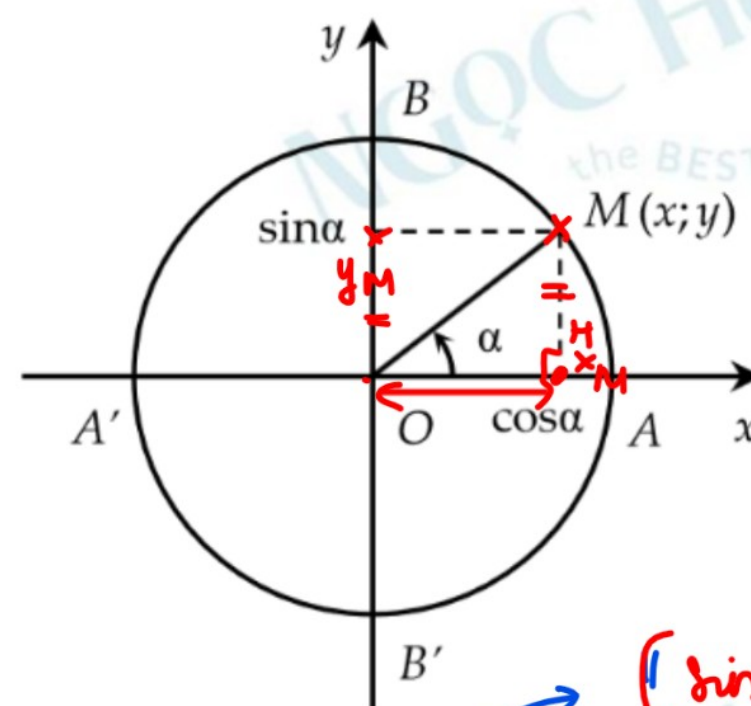


c) Điểm M trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo bằng $-\frac{11\pi}{4}$ được xác định trong hình bên.



3.2. Giá trị lượng giác của góc lượng giác

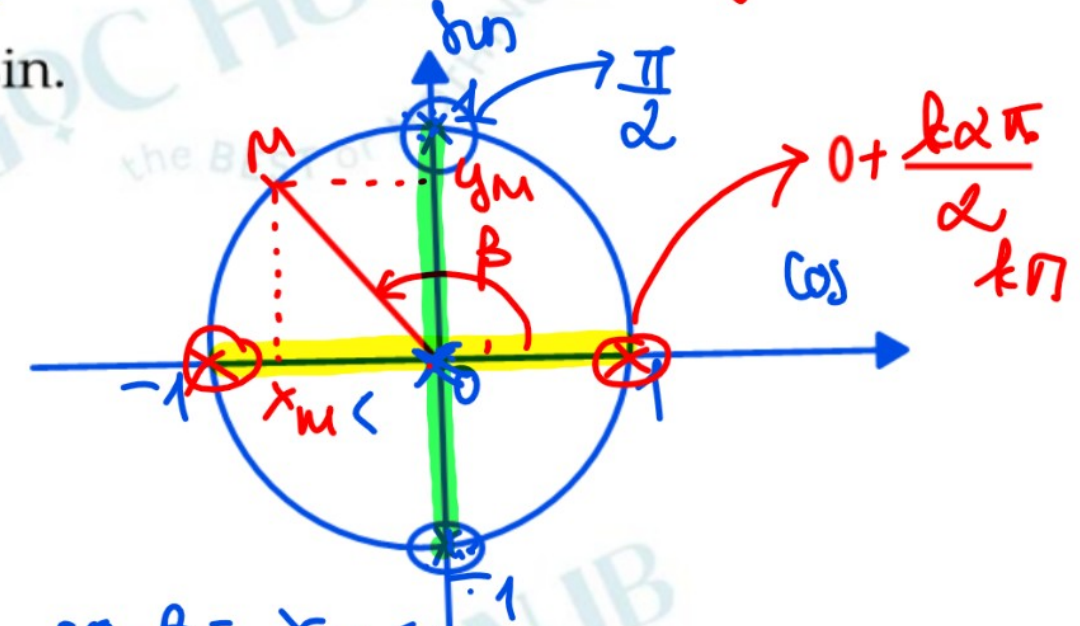
- $\cos \alpha = x$ (hoành độ của điểm M).
- $\sin \alpha = y$ (tung độ của điểm M).
- $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{y}{x} (x \neq 0)$.
- $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{x}{y} (y \neq 0)$.



$$\cos \alpha = \frac{x_M}{OM} = x_M$$

$$\sin \alpha = \frac{y_M}{OM} = y_M$$

(sin dọc, cos ngang)



$$\cos \beta = x_M < 0$$

$$\sin \beta = y_M$$

$$\Rightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

REMARK 1

Ta còn gọi trục tung là trục sin, trục hoành là trục cosin.

REMARK 2

- $\sin \alpha, \cos \alpha$ xác định với mọi giá trị của α và ta có:

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1; -1 \leq \cos \alpha \leq 1;$$

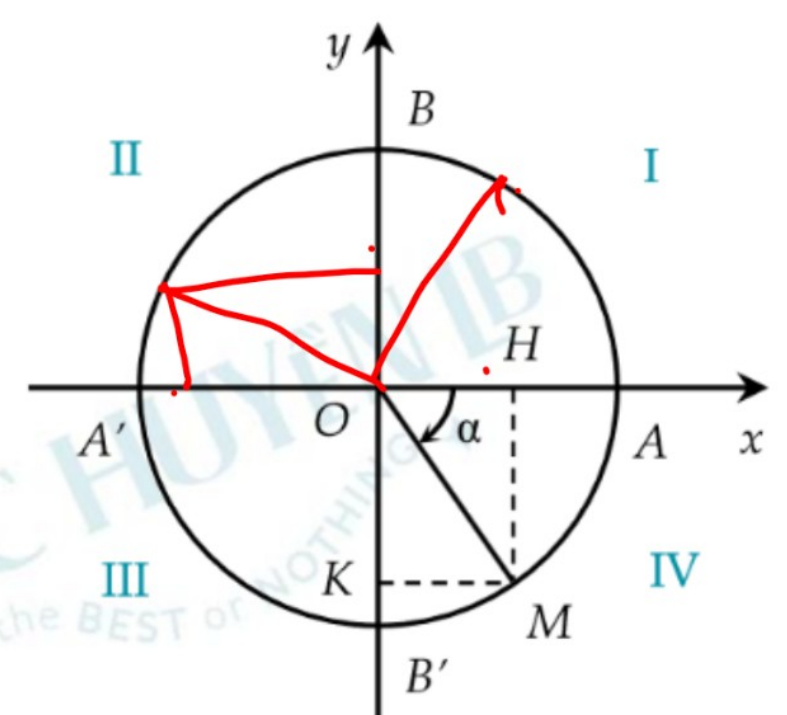
$$\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha; \cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha (k \in \mathbb{Z}).$$

- $\tan \alpha$ xác định khi $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$. $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{y}{x}$
- $\cot \alpha$ xác định khi $\alpha \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$. $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{x}{y}$

REMARK 3

Dấu của các giá trị lượng giác của một góc lượng giác phụ thuộc vào vị trí điểm biểu diễn M trên đường tròn lượng giác.

Góc phần tư	I	II	III	IV
Giá trị lượng giác				
$\cos \alpha$	+ ✓	- ✓	-	+
$\sin \alpha$	+ ✓	+ ✓	-	-
$\cot \alpha$	+ ✓	-	+	-
$\tan \alpha$	+ ✓	-	+	-



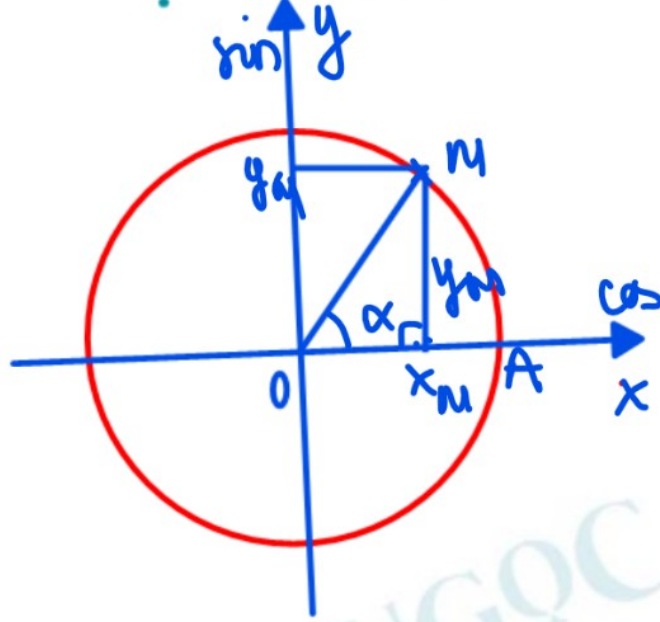
REMARK 4

Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt

Góc α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Không xác định
$\cot \alpha$	Không xác định	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

4. Quan hệ giữa các giá trị lượng giác

4.1. Hệ thức cơ bản



Học thuộc

- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.
- $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right)$.
- $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left(\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \right)$.
- $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \left(\alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right)$.

$\Rightarrow \cos \alpha = x_M; \sin \alpha = y_M$
 $\Rightarrow (\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$
 $= y_M^2 + x_M^2 = OM^2 = 1$
 $\Rightarrow 1 + \tan^2 \alpha = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

4.2. Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt

- Góc đối nhau (α và $-\alpha$)

$\cos(-\alpha) = \cos \alpha;$
 $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha;$
 $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha;$
 $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha.$

$\tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\tan \alpha$

$\cot(-\alpha) = \frac{1}{\tan(-\alpha)} = \frac{1}{-\tan \alpha} = -\cot \alpha.$

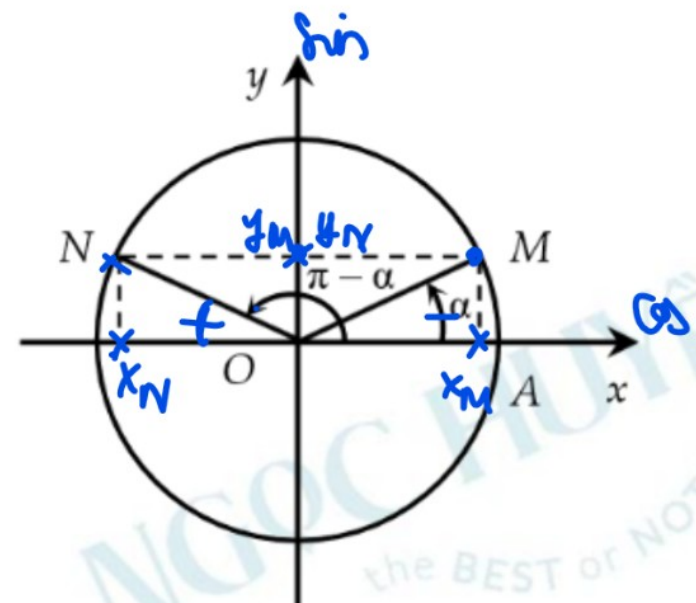
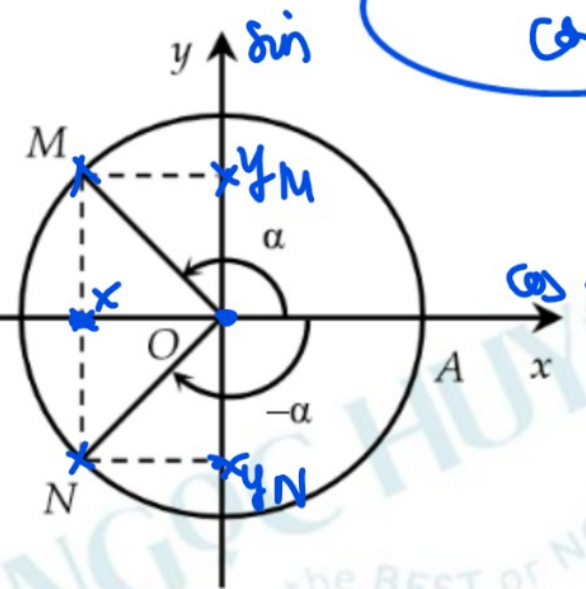
- Góc bù nhau (α và $\pi - \alpha$)

$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha;$

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha;$

$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha;$

$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha.$



- Góc phụ nhau (α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$)

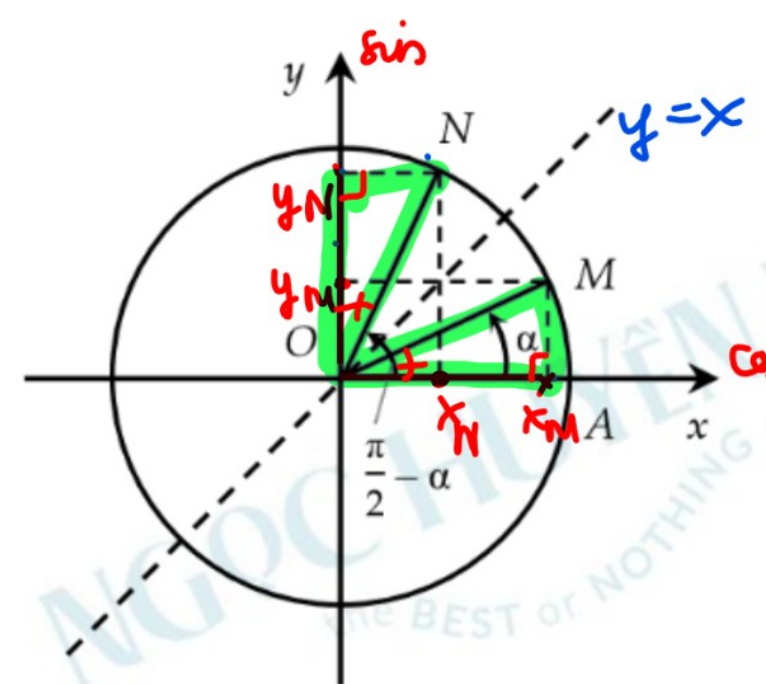
phụ chéo

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha; \quad +) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = y_N$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha; \quad \cos \alpha = x_N$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha;$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha.$$



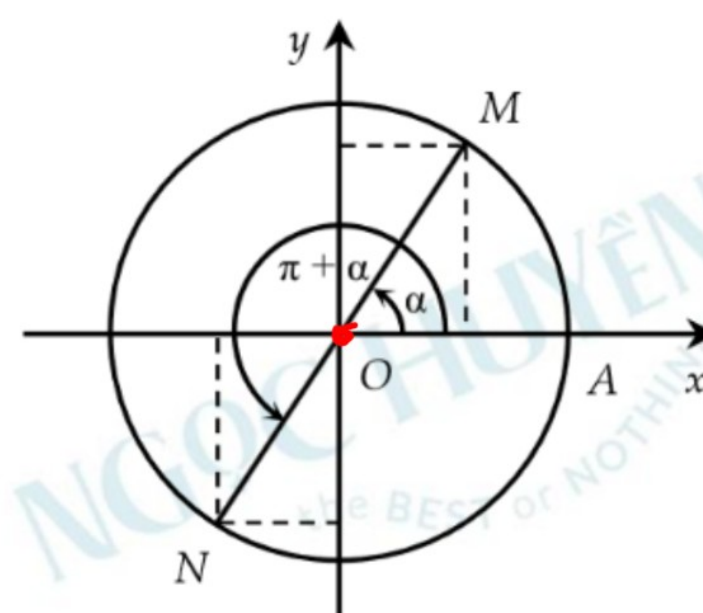
- Góc hơn kém π (α và $\pi + \alpha$)

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha;$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha;$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha;$$

$$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha.$$



REMARK

Ta có thể nhớ giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt bằng câu sau:

“Đối cos, bù sin, phụ chéo, hơn kém π tang”.

B Phân loại bài tập và phương pháp giải

Dạng 1 Đổi đơn vị đo độ và radian

Phương pháp

Dùng mối quan hệ giữa độ và radian: $180^\circ = \pi \text{ rad}$

- Đổi cung a có số đo từ radian sang độ $a \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$ Từ rad $\rightarrow$ Độ $\rightarrow$ Từ $180^\circ \rightarrow \frac{180^\circ}{\pi}$
- Đổi cung x° có số đo từ độ ra radian $x^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}$ $\rightarrow$ Độ $\rightarrow$ rad: $\rightarrow \frac{\pi}{180^\circ}$

[Ví dụ 1] a) Đổi số đo của các góc sau ra radian: $72^\circ, 600^\circ, -37^\circ 45' 30''$.

b) Đổi số đo của các góc sau ra độ: $\frac{5\pi}{18}, \frac{3\pi}{5}, -4$.

Lời giải

a) Vì $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$ nên $72^\circ = 72 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{5}$, $600^\circ = 600 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{10\pi}{3}$,

$$-37^\circ 45' 30'' = -37^\circ - \left(\frac{45}{60}\right)^\circ - \left(\frac{30}{60 \cdot 60}\right)^\circ = \left(\frac{4531}{120}\right)^\circ = \frac{4531}{120} \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0,6587$$

b) Vì $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$ nên $\frac{5\pi}{18} = \left(\frac{5\pi}{18} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 50^\circ$, $\frac{3\pi}{5} = \left(\frac{3\pi}{5} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 108^\circ$,

$$-4 = -\left(4 \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = -\left(\frac{720}{\pi}\right)^\circ \approx -2260^\circ 48'.$$

[Ví dụ 2] Đổi số đo cung tròn sang số đo độ:

a) $\frac{3\pi}{4}$;

b) $\frac{5\pi}{6}$.

Lời giải

a) $\frac{3\pi}{4} = 135^\circ$.

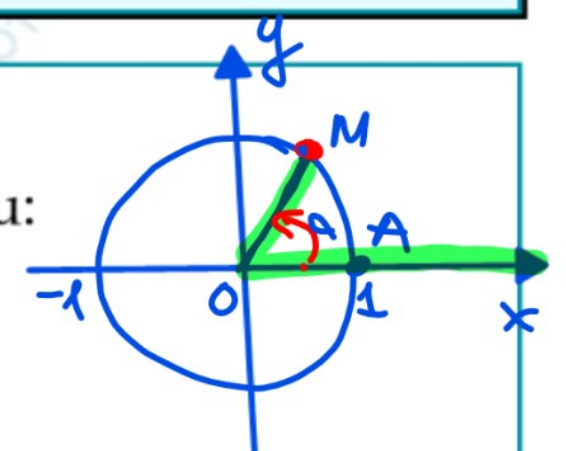
b) $\frac{5\pi}{6} = 150^\circ$.

Dạng 2 Biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác

Phương pháp

Để biểu diễn cung lượng giác có số đo trên đường tròn lượng giác ta thực hiện như sau:

- Chọn điểm $A(1;0)$ làm điểm đầu của cung.
- Xác định điểm cuối M của cung sao cho $\widehat{AM} = \alpha$



Lưu ý

- Số đo của các cung lượng giác có cùng điểm đầu và điểm cuối sai khác nhau một bội của 2π là:

$$\text{sđ } \widehat{AM} = \alpha + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$$

Ngoài ra, ta cũng có thể viết số đo bằng độ: $\text{sđ } \widehat{AM} = x^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

- Nếu ta có $\widehat{AM} = \alpha + k\frac{2\pi}{n}; k, n \in \mathbb{Z}$ thì sẽ có n điểm ngọn.

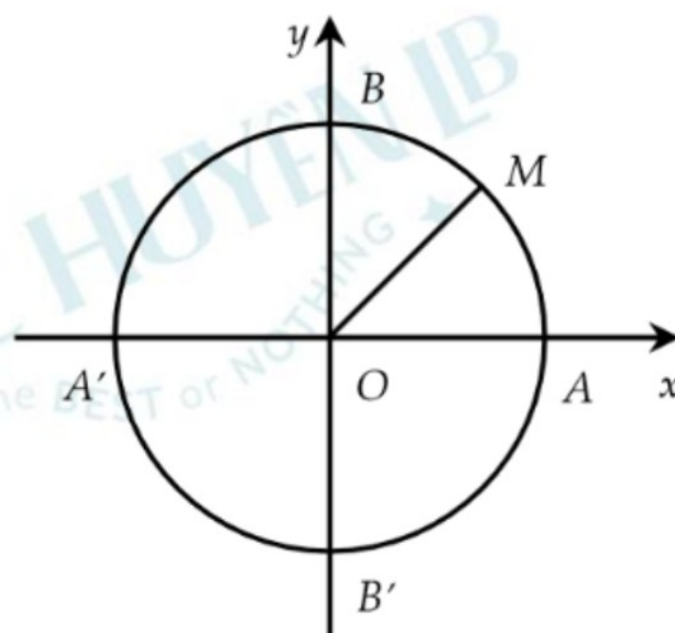
[Ví dụ 1] Biểu diễn trên đường tròn lượng giác điểm ngọn của cung lượng giác có số đo là $\frac{25\pi}{4}$.

Lời giải

Ta có số đo $\widehat{AM} = \frac{25\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{24\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 6\pi = \frac{\pi}{4} + 2 \cdot 3\pi$

Vậy điểm cuối M của cung $\widehat{AM}$ sẽ trùng với điểm ngọn của cung $\frac{\pi}{4}$.

Suy ra M là điểm chính giữa của cung nhỏ AB .



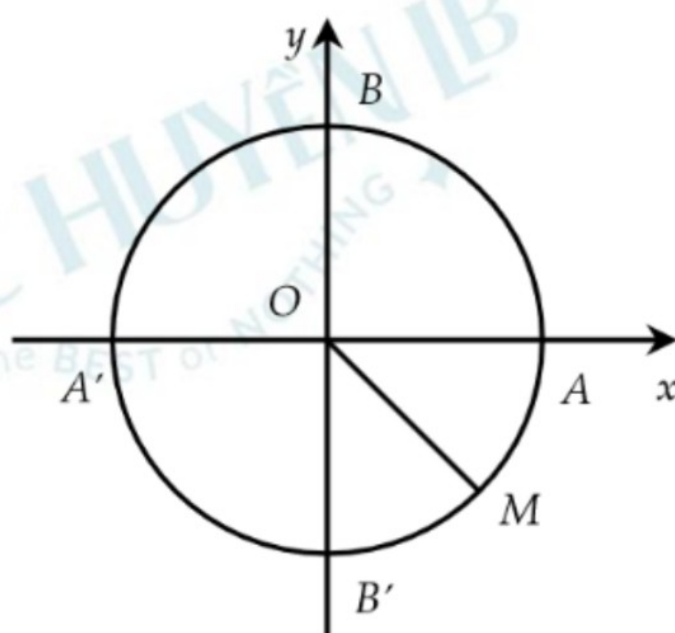
[Ví dụ 2] Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các điểm ngọn của cung lượng giác có số đo là -1485° .

Lời giải

Ta có số đo $\widehat{AM} = -1485^\circ = -45^\circ + (-4) \cdot 360^\circ$

Vậy điểm cuối M của cung $\widehat{AM}$ sẽ trùng với điểm ngọn của cung -45° .

Suy ra M là điểm chính giữa của cung nhỏ AB' .



Dạng 3 Độ dài của một cung tròn

Phương pháp

Cung có số đo α rad của đường tròn bán kính R có độ dài là $l = R \cdot \alpha$.

[Ví dụ] Một đường tròn có bán kính 30 cm. Tìm độ dài của các cung trên đường tròn có số đo sau đây:

$$\frac{\pi}{15} \text{ rad}; 70^\circ.$$

Lời giải

Gọi α, l, R lần lượt là số đo cung, độ dài cung và bán kính của đường tròn. Khi đó $R = 30$ cm

- Độ dài cung có số đo $\frac{\pi}{15}$ rad là: $l = R \cdot \alpha = 30 \cdot \frac{\pi}{15} = 2\pi$ (cm)
- Độ dài cung có số đo 70° :

Chuyển từ độ sang radian: $70^\circ = 70^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{7\pi}{18}$

Độ dài cung: $l = R \cdot \alpha = 30 \cdot \frac{7\pi}{18} = \frac{35\pi}{3}$ (cm).

Dạng 4 Tính giá trị của góc còn lại hoặc của một biểu thức lượng giác khi biết một giá trị lượng giác

Phương pháp

- Từ hệ thức lượng giác cơ bản là mối liên hệ giữa hai giá trị lượng giác, khi biết một giá trị lượng giác ta sẽ suy ra được giá trị còn lại. Cần lưu ý tới dấu của giá trị lượng giác để chọn cho phù hợp.
- Sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ trong đại số.

[Ví dụ] Tính giá trị lượng giác còn lại của góc α biết: $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Lời giải

Vì $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ nên $\cos \alpha < 0$ mặt khác $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ suy ra $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

$$\text{Do đó } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Dạng 5 Xác định giá trị của biểu thức chứa góc đặc biệt, góc liên quan đặc biệt và dấu của giá trị lượng giác của góc lượng giác

Phương pháp

- Sử dụng định nghĩa giá trị lượng giác
- Sử dụng tính chất và bảng giá trị lượng giác đặc biệt
- Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản và giá trị lượng giác của góc liên quan đặc biệt
- Để xác định dấu của các giá trị lượng giác của một cung (góc) ta xác định điểm ngọn của cung (tia cuối của góc) thuộc góc phần tư nào và áp dụng bảng xét dấu các giá trị lượng giác.

[Ví dụ] Tính giá trị biểu thức: $A = \sin \frac{7\pi}{6} + \cos 9\pi + \tan \left(-\frac{5\pi}{4} \right) + \cot \frac{7\pi}{2}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= \sin \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) + \cos (\pi + 4.2\pi) - \tan \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) + \cot \left(\frac{\pi}{2} + 3\pi \right) \\ \Rightarrow A &= -\sin \frac{\pi}{6} + \cos \pi - \tan \frac{\pi}{4} + \cot \frac{\pi}{2} = -\frac{1}{2} - 1 - 1 + 0 = -\frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Dạng 6 Chứng minh đẳng thức lượng giác, chứng minh biểu thức không phụ thuộc góc, đơn giản biểu thức

Phương pháp

Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản, các hằng đẳng thức đáng nhớ và sử dụng tính chất của giá trị lượng giác để biến đổi.

- Khi chứng minh một đẳng thức ta có thể biến đổi vế này thành vế kia, biến đổi tương đương, biến đổi hai vế cùng bằng một đại lượng khác.
- Chứng minh biểu thức không phụ thuộc góc x hay đơn giản biểu thức ta cố gắng làm xuất hiện nhân tử chung ở tử và mẫu để rút gọn hoặc làm xuất hiện các hạng tử trái dấu để rút gọn cho nhau.

[Ví dụ] Chứng minh đẳng thức sau (giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa):

$$\cos^4 x + 2\sin^2 x = 1 + \sin^4 x$$

Lời giải

$$\text{Đẳng thức tương đương với } \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x + (\sin^2 x)^2 \Leftrightarrow \cos^4 x = (1 - \sin^2 x)^2 \quad (*)$$

$$\text{Mà } \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x. \text{ Do đó } (*) \Leftrightarrow \cos^4 x = (\cos^2 x)^2 \text{ (đúng) (ĐPCM).}$$

C Hệ thống ví dụ minh họa

Phần 1 Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án

BONUS 1 Góc có số đo 108° đổi ra radian là

A. $\frac{3\pi}{5}$.

B. $\frac{\pi}{10}$.

C. $\frac{3\pi}{2}$.

D. $\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Vì $1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \text{ (rad)}$ nên $108^\circ = 108^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{3\pi}{5}$

BONUS 2 Góc có số đo $-\frac{7\pi}{4}$ thì góc đó có số đo là

A. -315° .

B. -630° .

C. $-1^\circ 45'$.

D. -135° .

Lời giải

Vì $1 \text{ (rad)} = \frac{180^\circ}{\pi} \text{ (độ)}$ nên

$-\frac{7\pi}{4} \text{ (rad)} = \left(-\frac{7\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = -315^\circ$

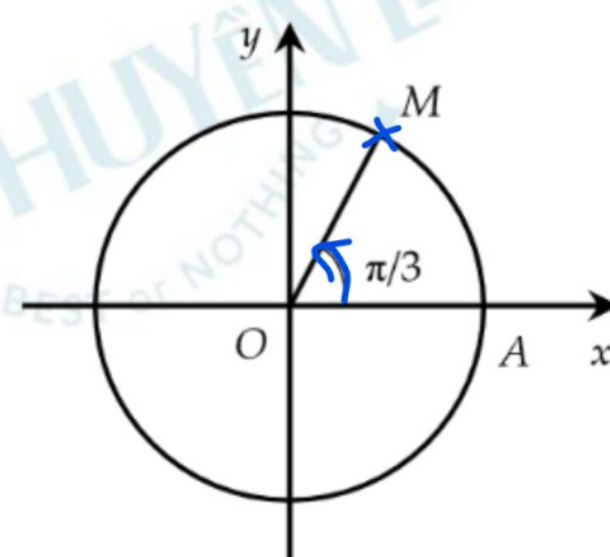
BONUS 3 Điểm M như hình bên là điểm biểu diễn cho góc lượng giác nào?

A. $-\frac{5\pi}{3}$.

B. $\frac{5\pi}{3}$.

C. $\frac{8\pi}{3}$.

D. $-\frac{7\pi}{3}$.



Lời giải

Điểm M biểu diễn cho các góc lượng giác
 $\text{st } (Ox, OM) = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$-\frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - 1 \cdot 2\pi \text{ (rad)} \quad (\text{với } k=-1)$

BON 4 Góc lượng giác $\frac{27\pi}{5}$ có cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác với góc lượng giác nào?

A. $\frac{40\pi}{5}$.

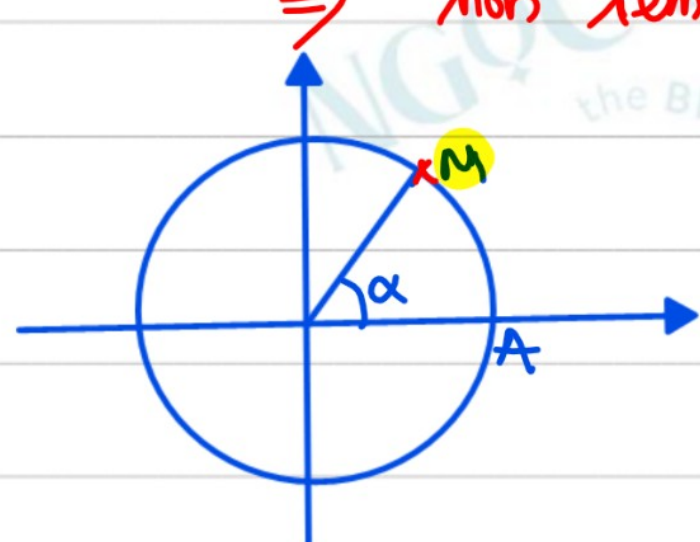
B. $-\frac{40\pi}{5}$.

C. $\frac{38\pi}{5}$.

D. $-\frac{13\pi}{5}$.

Lời giải

Hai góc lượng giác có chung đ' biểu diễn trên đ' tròn lượng giác
hơn kém nhau bội số của 2π .



$$\text{st}(Ox, OM) = \alpha + k \cdot 2\pi \text{ (rad)} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

+> Với A: $\frac{40\pi}{5} - \frac{27\pi}{5} = \frac{13\pi}{5} \Rightarrow$ loại;

+> Với B: $-\frac{40\pi}{5} - \frac{27\pi}{5} = -\frac{67\pi}{5} \Rightarrow$ loại;

+> Với C: $\frac{38\pi}{5} - \frac{27\pi}{5} = \frac{11\pi}{5} \Rightarrow$ loại;

+> Với D: $-\frac{13\pi}{5} - \frac{27\pi}{5} = -\frac{40\pi}{5} = -8\pi = -4 \cdot 2\pi \Rightarrow$ đúng

BON 5 Góc lượng giác nào sau đây có cùng điểm cuối với góc -45° là

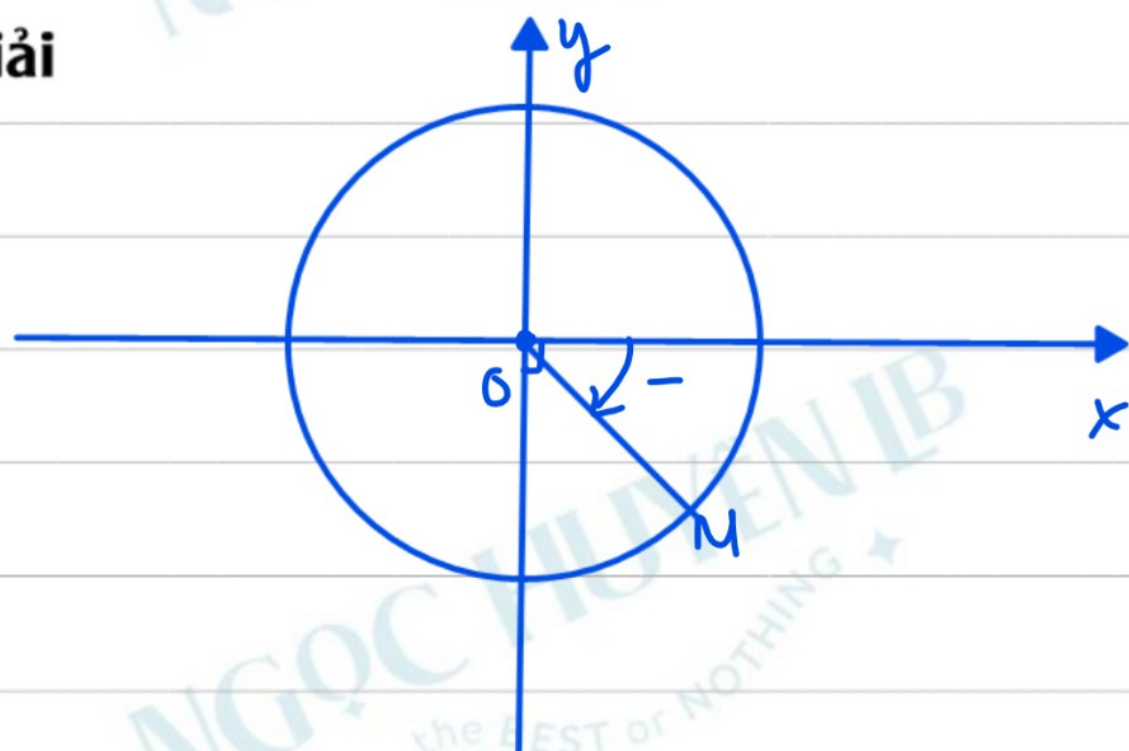
A. 315° .

B. 135° .

C. -135° .

D. -315° .

Lời giải



$$\text{st}(Ox, OM) = -45^\circ$$

Ta thấy: $315^\circ = -45^\circ + 360^\circ$

BON 6 Cho góc $AOB = \frac{7\pi}{12}$. Số đo của góc lượng giác (OA, OB) được biểu

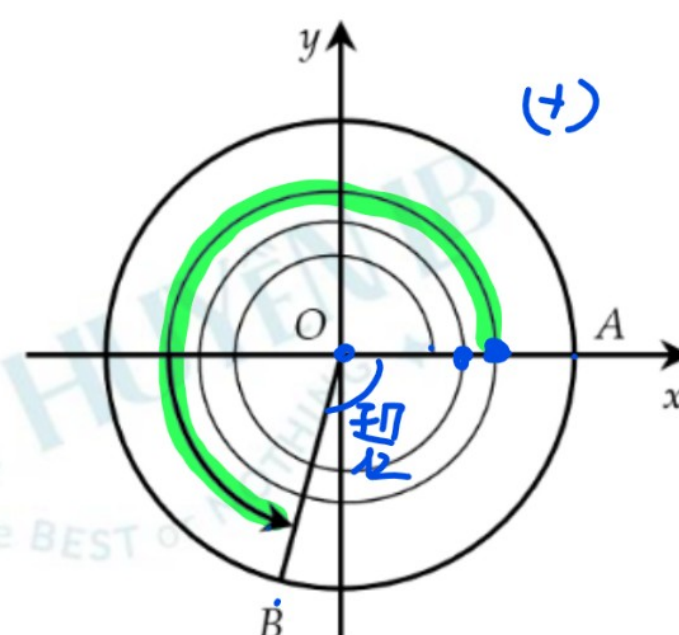
diễn ở hình bên là

A. $\frac{5\pi}{12}$.

B. $\frac{65\pi}{12}$.

C. $\frac{29\pi}{12}$.

D. $\frac{17\pi}{6}$.

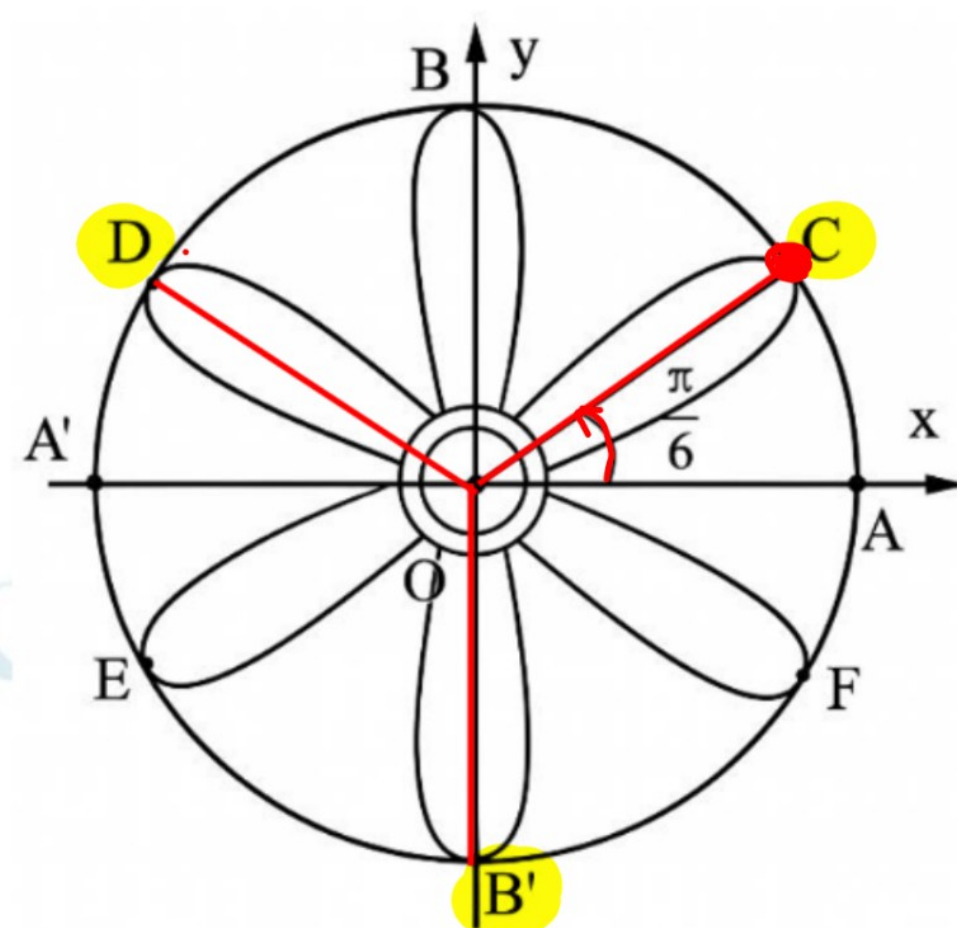


Lời giải

+> Nx: Quay chiều dương.

$$\begin{aligned} \text{st}(OA, OB) &= + \left[\alpha \cdot 2\pi + \left(2\pi - \frac{7\pi}{12} \right) \right] \\ &= \frac{65\pi}{12} \end{aligned}$$

BON 7 Trong hình cánh quạt như hình bên, những điểm nào là điểm biểu diễn của góc lượng giác $\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$?



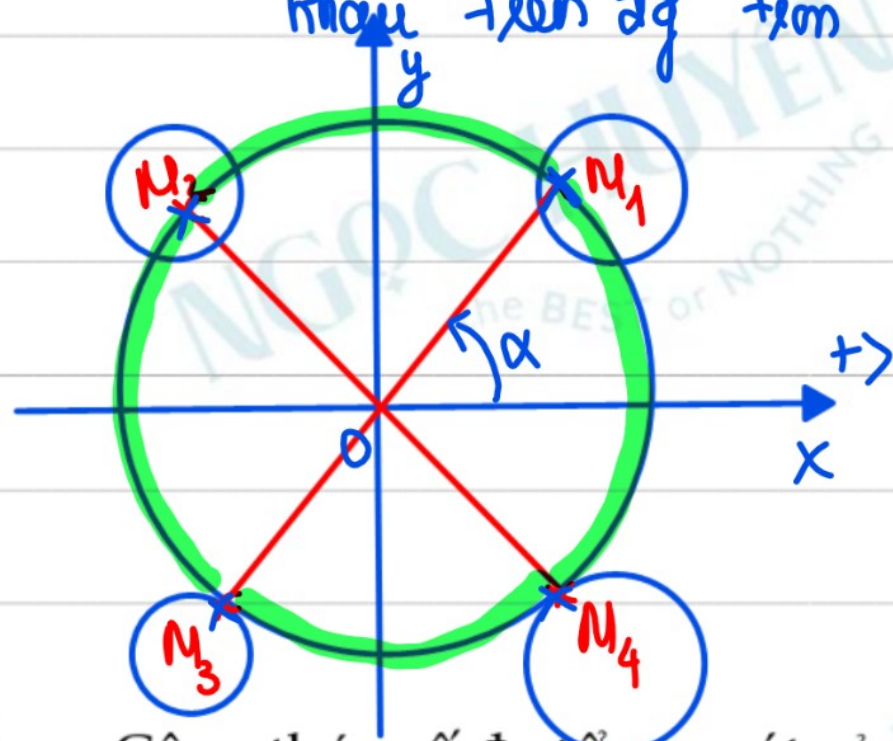
- A. Điểm C, điểm D và điểm E.
B. Điểm C, điểm D và điểm F.
C. Điểm C, điểm D và điểm B'.
D. Điểm C, điểm E và điểm F.

Lời giải

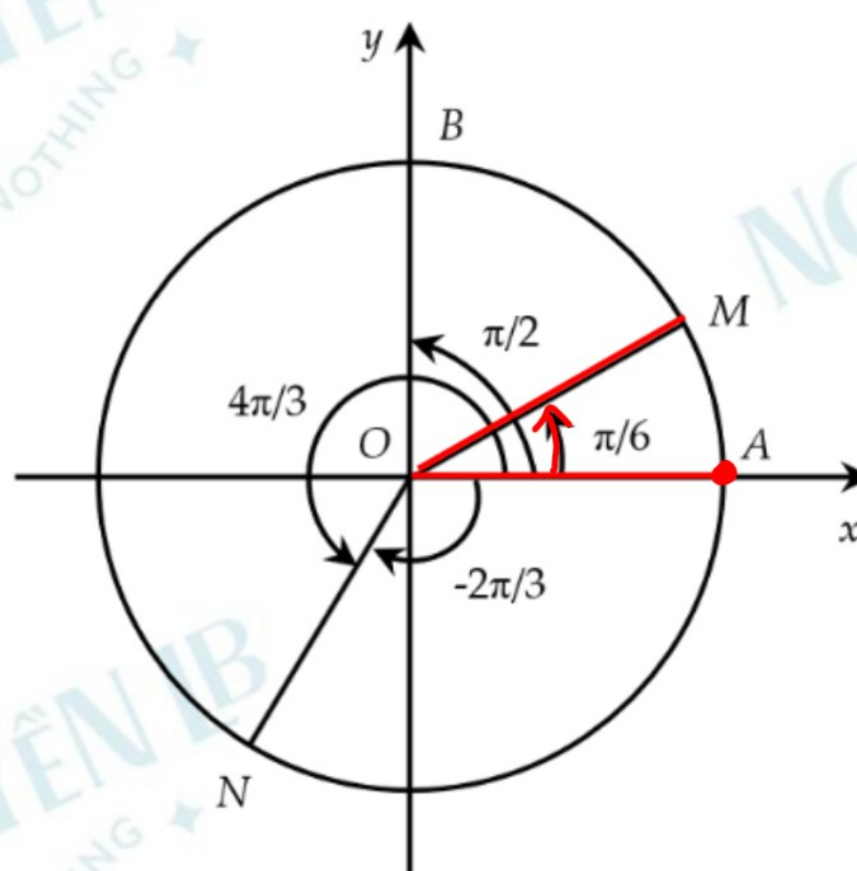
* Nếu các góc lượng giác khác nhau biểu diễn bởi n điểm cách đều nhau trên đường tròn thì góc thu được là:

$$\alpha + \frac{k2\pi}{n} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\alpha + \frac{k2\pi}{4} = \alpha + \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$



BON 8 Công thức số đo tổng quát của góc lượng giác (OA, OM) trong hình dưới là

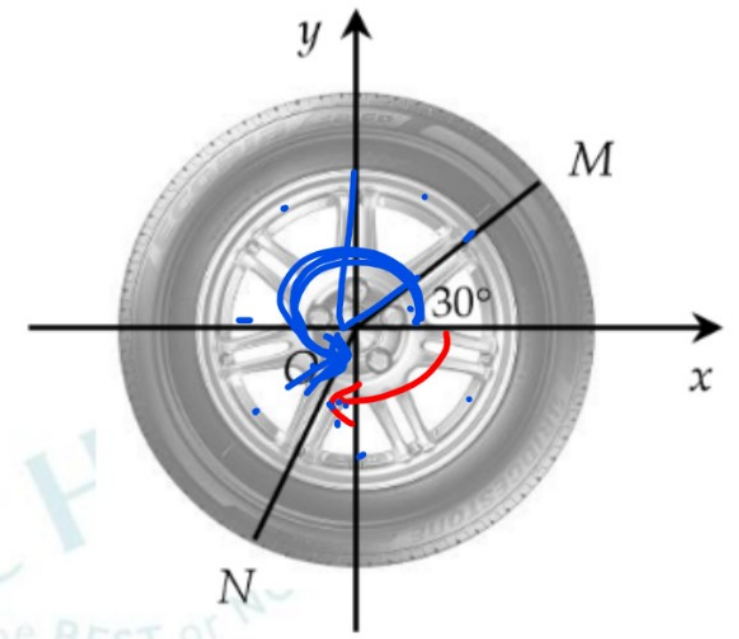


- A. $\frac{\pi}{2} + k2\pi$.
B. $\frac{\pi}{6} + k2\pi$.
C. $\frac{4\pi}{3} + k2\pi$.
D. $\frac{-2\pi}{3} + k\pi$.

Lời giải

$$\text{Số } (OA, OM) = \frac{\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

BON 9 Trong hình vẽ bên, mâm bánh xe gắn máy được chia thành 7 phần bằng nhau. Công thức tổng quát của góc lượng giác (Ox, ON) là



A. $-\frac{870^\circ}{7}$.

B. 240° .

C. $\frac{870^\circ}{7}$ hoặc 240° .

D. $-\frac{870^\circ}{7} + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

→ Mỗi phần của mâm bánh xe ứng với: $\frac{360^\circ}{7}$

→ Góc $\widehat{MON}$ ứng với 3 phần

$$\Rightarrow \widehat{MON} = 3 \cdot \frac{360^\circ}{7} = \frac{1080^\circ}{7}$$

$$\Rightarrow \widehat{xON} = \widehat{MON} - \widehat{MOx} = \frac{1080^\circ}{7} - 30^\circ = \frac{870^\circ}{7}$$

$$st(Ox, ON) = -\frac{870^\circ}{7} + k \cdot 360^\circ (k \in \mathbb{Z})$$

$$= -\frac{1650^\circ}{7} + m \cdot 360^\circ (m \in \mathbb{Z})$$

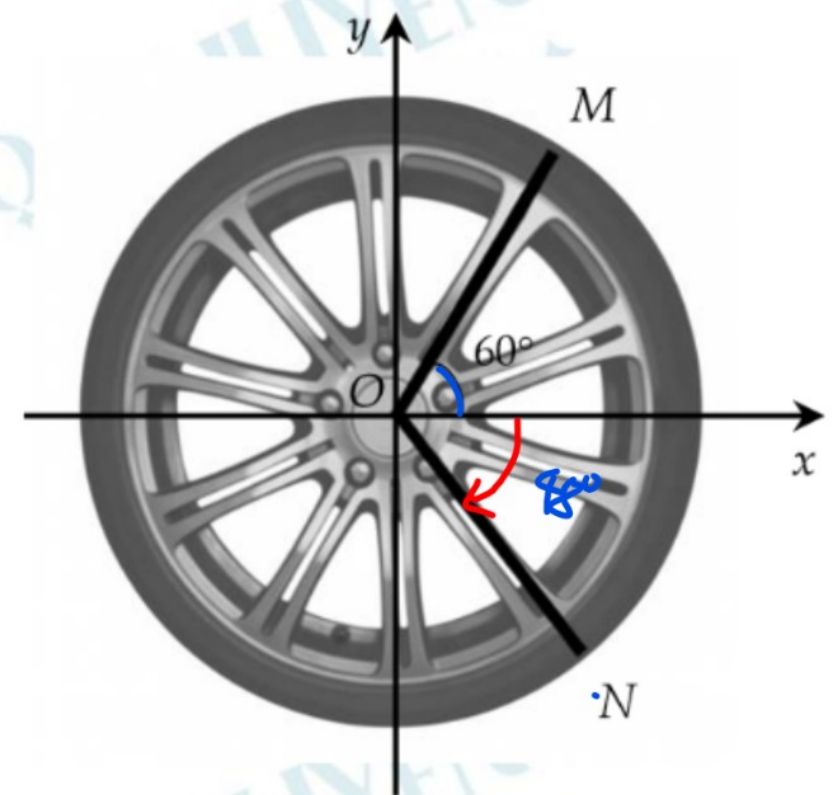
BON 10 Trong hình vẽ dưới đây, mâm bánh xe gắn máy được chia thành 10 phần bằng nhau. Công thức tổng quát của góc lượng giác (Ox, ON) là

A. -48° .

B. 240° .

C. 240° hoặc -48° .

D. $-48^\circ + k360^\circ, (k \in \mathbb{Z})$.



Lời giải

→ Vì mâm bánh xe chia thành 10 phần bằng nhau nên mỗi phần ứng với: $\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{MON} = 3 \cdot 36^\circ = 108^\circ \Rightarrow \widehat{xON} = \widehat{MON} - \widehat{MOx} = 108^\circ - 60^\circ = 48^\circ$$

$$\Rightarrow (Ox, ON) = -48^\circ + k \cdot 360^\circ (k \in \mathbb{Z})$$

- BONUS 11** Cho đường tròn bán kính 3 cm . Tính độ dài cung tròn có số đo $\frac{5\pi}{3}$ trên đường tròn đó?
- A. $10\pi\text{ cm}$. **B.** $5\pi\text{ cm}$. C. 10 cm . D. 1 cm .

Lời giải

Áp dụng công thức $l = R \cdot \alpha$ (α : rad)

$$\Rightarrow l = R \cdot \frac{5\pi}{3} = 3 \cdot \frac{5\pi}{3} = 5\pi (\text{cm})$$

- BONUS 12** Cho góc lượng giác α có điểm cuối $M\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Khi đó giá trị $\sin \alpha = ?$

- A. $\sin \alpha = \frac{1}{2}$. B. $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$. C. $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

$$\cos \alpha = x_M = -\frac{1}{2}$$

$$\sin \alpha = y_M = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- BONUS 13** Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\sin(-\alpha) = \sin \alpha$. **B.** $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$. C. $\cos(-\alpha) = -\cos \alpha$. D. $\cos(\pi - \alpha) = \cos \alpha$.

Lời giải

Cos đối, sin bù phụ chéo

$$\alpha + \pi - \alpha = \pi = 180^\circ$$

Phần 2 Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) thí sinh chọn đúng hoặc sai

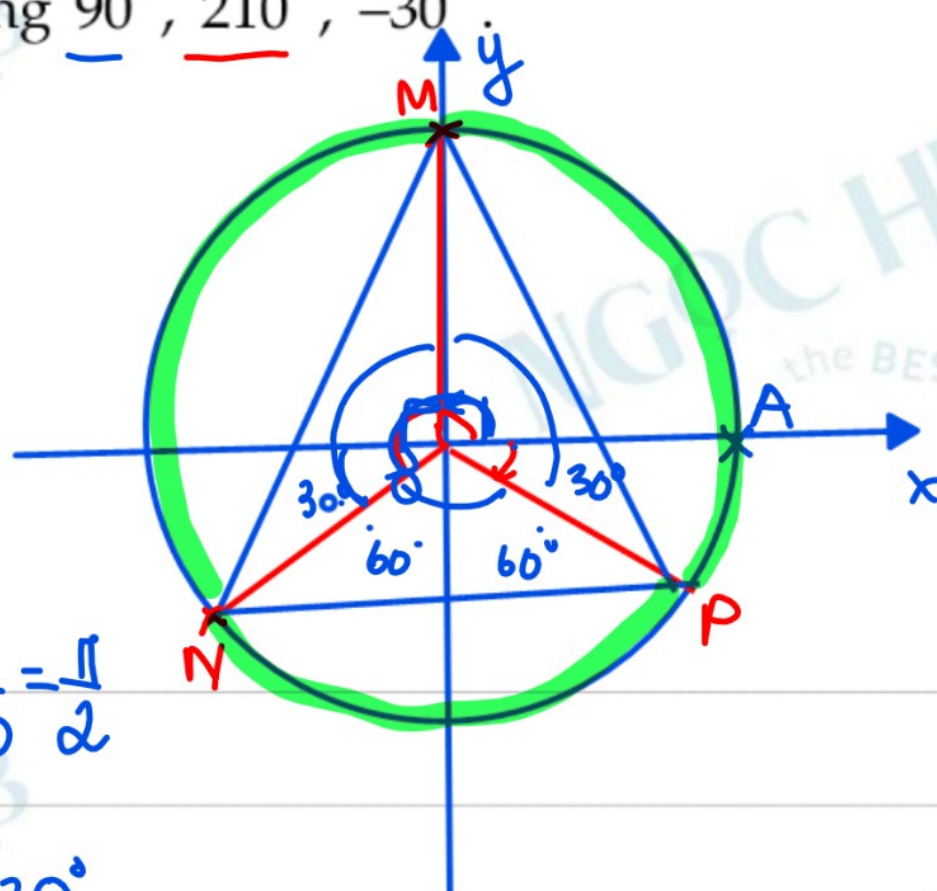
BÓN 14 Gọi M, N, P là các điểm trên đường tròn lượng giác sao cho số đo của các góc lượng giác (OA, OM) , (OA, ON) , (OA, OP) lần lượt bằng 90° , 210° , -30° .

Đ a) $(OA, OM) = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$.

Đ b) $\widehat{MON} = 120^\circ$.

S c) $(OP, OM) = 60^\circ$.

Đ d) Tam giác MNP là tam giác đều.



Lời giải

a) $(OA, OM) = 90^\circ = 90 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{2}$

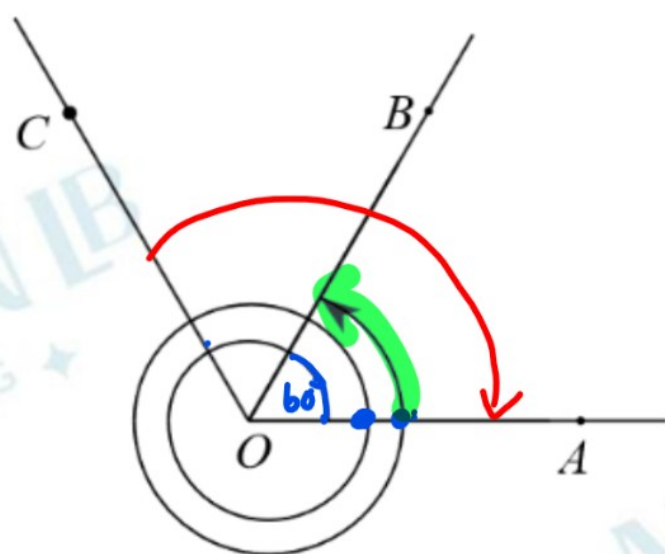
b) $\widehat{MON} = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$

c) $(OP, OM) = (OA, OM) - (OA, OP) = 90^\circ - (-30^\circ) = 120^\circ$
(Áp dụng Sa-lơ)

d) Ta có $\widehat{MON} = \widehat{NOP} = \widehat{POM} = 120^\circ$

$\Rightarrow MN = NP = PM \Rightarrow \Delta MNP$ đều

BÓN 15 Cho hình vẽ, biết góc $AOB = 60^\circ$, góc $AOC = 120^\circ$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau?



- Đ a) Số đo của góc lượng giác (OA, OB) trong hình trên là 780° . $\star (OA, OB) = 2 \cdot 360^\circ + 60^\circ = 780^\circ$
- Đ b) Công thức tổng quát của số đo góc lượng giác (OA, OB) là $(OA, OB) = 60^\circ + k360^\circ (k \in \mathbb{Z})$.
- S c) $(OA, OB) + (OB, OC) = (OA, OC) + k360^\circ (k \in \mathbb{Z})$.
- S d) Công thức tổng quát của số đo góc lượng giác (OC, OA) là $(OC, OA) = 120^\circ + k360^\circ (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải

$$\begin{aligned} & \text{c) } (OA, OB) + (OB, OC) = (OA, OC) + l \cdot 360^\circ (l \in \mathbb{Z}) \\ & \quad (S_a - S_b) \\ & \text{d) } (OC, OA) = -120^\circ + l \cdot 360^\circ (l \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

BON 16 Cho $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Các khẳng định sau đây đúng hay sai?

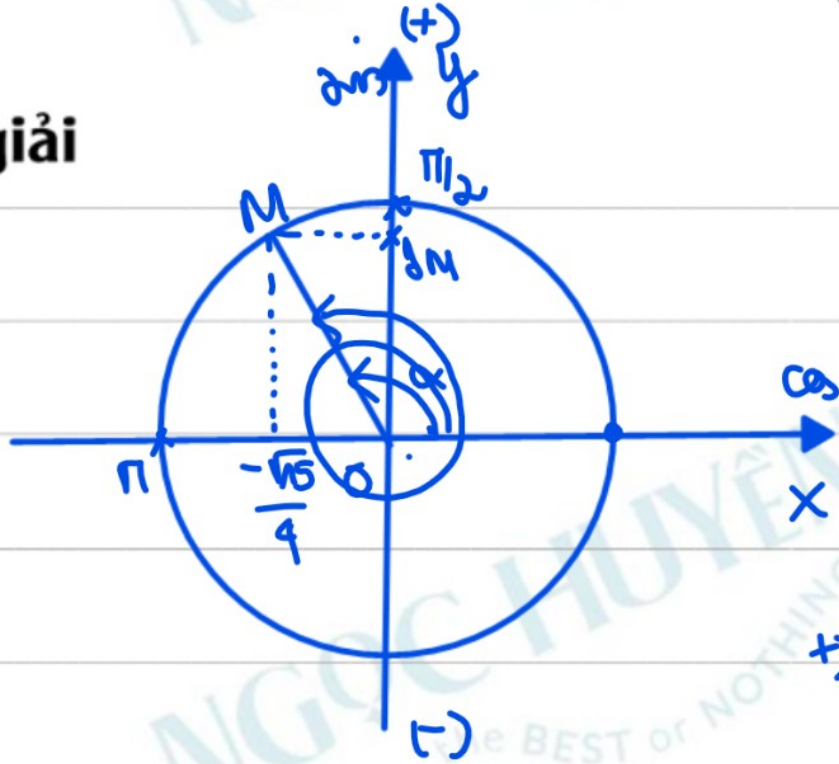
S a) $\sin \alpha < 0$. $\sin \alpha > 0$

Đ b) $\cos(\pi - \alpha) > 0$.

Đ c) Biết $(\sin \alpha + 2\cos \alpha)^2 = \frac{a+b\sqrt{15}}{16}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Giá trị $a+b=57$.

S d) Giá trị của biểu thức $2\cos \alpha - 3\cos(\pi - \alpha) + 5\sin\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) + \cot\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$ bằng $-\sqrt{15}$.

Lời giải



a) $\sin \alpha > 0$

b) $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha = -\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) = \frac{\sqrt{15}}{4} > 0$

c) $(\sin \alpha + 2\cos \alpha)^2 =$

$\Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \sin^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \end{cases} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{4}$

hay ra $(\sin \alpha + 2\cos \alpha)^2 = \left(\frac{1}{4} + 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right)\right)^2 = \frac{61 - 4\sqrt{15}}{16} = \frac{a+b\sqrt{15}}{16}$

$\Rightarrow \begin{cases} a=61 \\ b=-4 \end{cases} \Rightarrow a+b=61-4=57$

d) Giá trị của biểu thức $2\cos \alpha - 3\cos(\pi - \alpha) + 5\sin\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) + \cot\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$ bằng $-\sqrt{15}$.

$2\cos \alpha - 3\cos(\pi - \alpha) + 5\sin\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) + \cot\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$

$= 2\cos \alpha - 3(-\cos \alpha) + 5\sin\left(\pi + \pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cot\left(\pi + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right)$

$= 5\cos \alpha + 5\sin\left(\pi + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) + \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

$= 5\cos \alpha - 5\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

• Góc hơn kém π (α và $\pi + \alpha$)

$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha;$

$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha;$

$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha;$

$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha.$

$= 5\cos \alpha - 5\cos \alpha + \tan \alpha$

$= \tan \alpha$

$= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{4}}{-\frac{\sqrt{15}}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{15}} \neq -\sqrt{15}$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha;$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha;$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha;$

$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha.$

Phần 3 Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

BON 17 Cho $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Hãy xác định dấu của $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$.

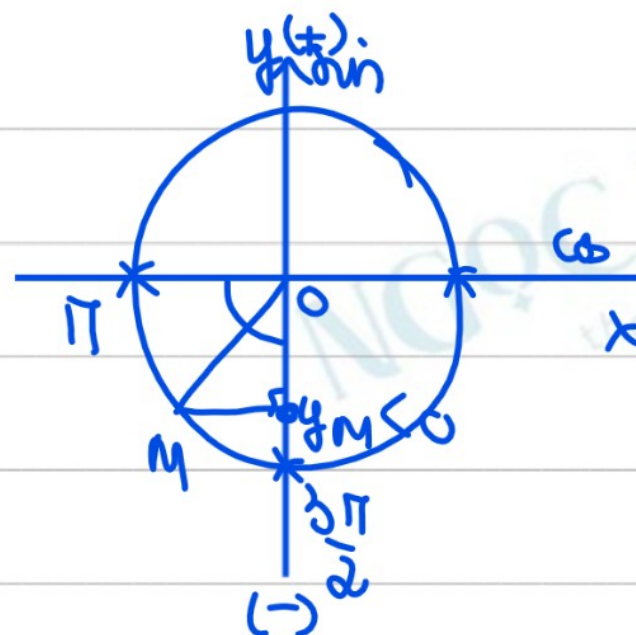
Lời giải

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} < \alpha + \frac{\pi}{2} < \pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \pi < \alpha + \frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) < 0.$$



BON 18 Rút gọn biểu thức: $E = \sin(x + 4\pi) + \cos(3\pi - x) - \sin x + \cos x$.

Lời giải

$$\begin{aligned} E &= \sin(x + 4\pi) + \cos(3\pi - x) - \sin x + \cos x \\ &= \sin(x + 2 \cdot 2\pi) + \cos(2\pi + \pi - x) - \sin x + \cos x \\ &= \sin x + \cos(\pi - x) - \sin x + \cos x \\ &= \cos(\pi - x) + \cos x = -\cos x + \cos x = 0 \end{aligned}$$

- Góc bù nhau (α và $\pi - \alpha$)

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha;$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha;$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha;$$

$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha.$$

BON 19 Rút gọn biểu thức: $H = \frac{\tan x - 1}{1 - \cot x}$.

Lời giải

$$H = \frac{\tan x - 1}{1 - \cot x} = \frac{\tan x - 1}{1 - \frac{1}{\tan x}} \quad \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$= \frac{\tan x - 1}{\frac{\tan x}{\tan x} - \frac{1}{\tan x}} = \frac{\tan x - 1}{\frac{\tan x - 1}{\tan x}} = \frac{1}{1} = \tan x$$

BON 20 Biết $\sin(\pi - \alpha) = -\frac{3}{7}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $P = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin(-\alpha)$ (kết quả làm tròn đến một chữ số thập phân sau dấu phẩy) **-1,3**

Lời giải

$$P = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin(-\alpha)$$

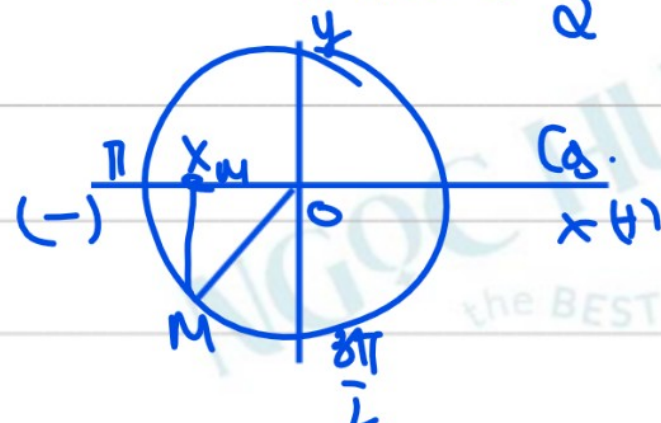
$$= \cos \alpha - (-\sin \alpha)$$

$$= \cos \alpha + \sin \alpha \quad \text{①}$$

Mà: $\sin(\pi - \alpha) = -\frac{3}{7} \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{3}{7}$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{40}{49}$$

$$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos \alpha < 0$$



Thay vào ①: $P = -\frac{\sqrt{40}}{7} - \frac{3}{7} \approx -1,3$

• Góc bù nhau (α và $\pi - \alpha$)

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha;$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha;$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha;$$

$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha.$$

• Góc phụ nhau (α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha;$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha;$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha.$$

BON 21 Cho biết biểu thức $\frac{\sin(x-8\pi) + 3\cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)} = k \tan x, k \in \mathbb{R}$. Tính k . $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$
 -4

Lời giải

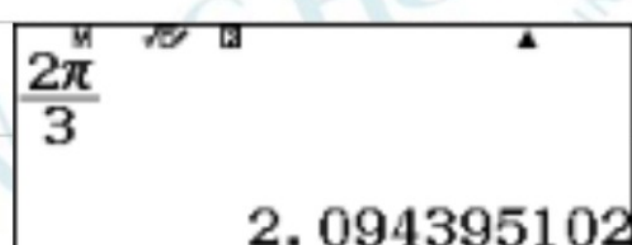
$$\begin{aligned} VT &= \frac{\sin x + 3 \cdot \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\pi + \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)} = \frac{\sin x + 3 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{-\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \\ &= \frac{\sin x + 3 \sin x}{-\cos x} = \frac{4 \sin x}{-\cos x} = -4 \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = -4 \tan x = k \tan x \\ &\rightarrow k = -4 \end{aligned}$$

BON 22 Một bánh xe có 54 răng. Biết rằng bánh xe đã di chuyển được 18 răng. Hỏi số đo góc bánh xe đã quay được là bao nhiêu radian (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)? $(2,09)$

Lời giải

$$\rightarrow \frac{54 \text{ răng}}{1 \text{ răng}} \cdot \frac{2\pi}{54} \text{ (rad)}$$

$$\rightarrow 18 \text{ răng} \cdot \frac{2\pi}{54} = \frac{2\pi}{3} \approx 2,09 \text{ (rad)}$$



2.094395102

BON 23 Bánh xe đạp có đường kính 55cm (kể cả lốp). Nếu chạy với vận tốc 40km/h thì trong 25s bánh xe quay được số vòng gần bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)? **161**

Lời giải

$$+> v = 40 \text{ km/h} = \frac{40 \cdot 1000}{3600} = \frac{40000}{3600} \text{ (m/s)}$$

$$v = \frac{100}{9} \text{ (m/s)}$$


$$+> d = 55 \text{ cm} = 0,55 \text{ m} \Rightarrow R = 0,275 \text{ (m)}$$

+) Quãng đường bánh xe di chuyển trong 25s là:

$$l = \frac{100}{9} \cdot 25 = \frac{2500}{9} \text{ (m)}$$

+) $\frac{2\pi R}{\frac{2500}{9} \text{ m}}$ ứng với 1 vòng ứng với số vòng là: $\frac{2500}{9} : (2\pi \cdot 0,275) =$

$$\frac{2500}{9} : (2\pi \cdot 0,275) = 160,7625688$$

$\approx 161 \text{ vòng}$